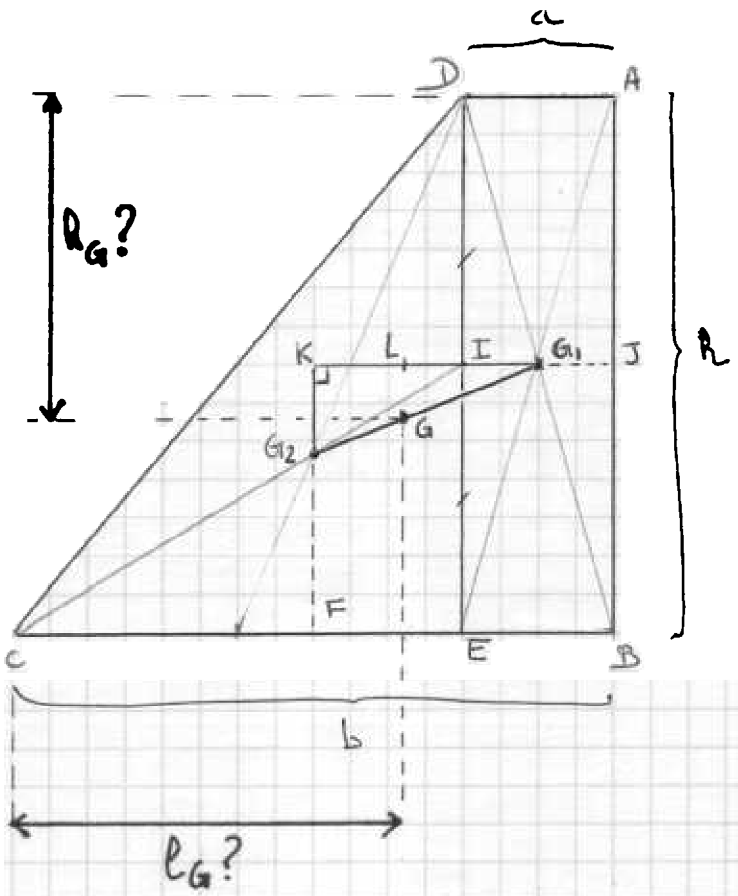
CALCUL DU BARYCENTRE D'UN TRAPEZE RECTANGLE



G_1 centre de gravité de ABED

G_2 " " CDE

G centre de gravité de ABCD

α_1 = aire de ABED = $a.h$

α_2 = aire de CDE $= \frac{(b-a)h}{2}$

G est barycentre de $\left\{(G_1, \underbrace{ah}_{\alpha_1}) ; (G_2, \underbrace{\frac{(b-a)h}{2}}_{\alpha_2})\right\}$

G est le point vérifiant : $\alpha_2 \overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1 + \alpha_2) \overrightarrow{G_1G}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \overrightarrow{G_1G_2}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{(b-a)\frac{h}{2}}{(b+a)\frac{h}{2}} = \frac{b-a}{b+a}$$

Donc $G_1G = \frac{b-a}{b+a} G_1G_2$ (1)

1) $h_G = ?$

$h_G = DI + LG$ avec $DI = \frac{h}{2}$ et LG à déterminer.

THALES dans le triangle G_1KG_2 donne : $\frac{LG}{KG_2} = \frac{G_1G}{G_1G_2}$

D'après (1) : $\frac{G_1G}{G_1G_2} = \frac{b-a}{b+a}$ donc : $\mathbf{LG = \frac{b-a}{b+a} KG_2}$

On calcule KG_2 : $\underline{KG_2 = IE - FG_2}$

G_2 est le centre de gravité du triangle CDE, il est donc situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane CI.

THALES dans le triangle CEI donne donc

$$\frac{FG_2}{IE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{FG_2 = \frac{2}{3} IE}$$

Donc : $KG_2 \; IE - \frac{2}{3} IE = \frac{IE}{3}$

I étant le milieu de ED, $IE = \frac{h}{2} \Rightarrow \mathbf{KG_2 = \frac{h}{6}}$

$$\text{Donc } h_G = \frac{h}{2} + \frac{b-a}{b+a} \times \frac{h}{6} = \frac{h}{2}\left[\frac{3(b+a)}{3(b+a)} + \frac{b-a}{3(b+a)}\right]$$

$$= \frac{h}{2} \; \frac{4b+2a}{3(b+a)}$$

$$\boxed{h_G = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}}$$

Rq : Pour calculer le bras de levier de la poussée de l'eau sur un barrage, on a besoin de

$$x = h - h_G = h\left[\frac{3a+3b-a-2b}{3(a+b)}\right] = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

2) $\ell_G = ?$

$\ell_G = CF + KL$

THALES dans CEI donne : $CF = \frac{2}{3} CE \Rightarrow \mathbf{CF = \frac{2}{3}(b-a)}$

On calcule KL

THALES dans KG_2G_1 donne $\frac{KL}{KG_1} = \frac{G_2G}{G_2G_1}$

G vérifie $\alpha_2 \overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_1G}$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 \overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1+\alpha_2)(\overrightarrow{G_1G_2}+\overrightarrow{G_2G})$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 \overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_1G_2} + (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_2G}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 \overrightarrow{G_1G_2} - (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_2G}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_1 \overrightarrow{G_1G_2} = (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{G_2G}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G_2G}{G_1G_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$$

Or, $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{aR}{(b+a)\frac{R}{2}} = \frac{2a}{b+a} \Rightarrow \mathbf{KL = \frac{2a}{b+a} KG_1}$

<u>Calcul de KG_1</u>

On a : $CB = CF + KG_1 + G_1J \Rightarrow KG_1 = CB - CF - G_1J$

$KG_1 = b - \frac{2}{3}CE - \frac{a}{2}$

$KG_1 = b - \frac{2}{3}(b-a) - \frac{a}{2}$

$\underline{KG_1 = \frac{b}{3} + \frac{a}{6}}$

Donc : $\rho_G = \frac{2}{3}(b-a) + \frac{2a}{b+a}\left(\frac{b}{3} + \frac{a}{6}\right)$

$$\rho_G = \frac{1}{3}\left[2(b-a) + \frac{2a}{b+a}\left(b + \frac{a}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_G = \frac{1}{3}\left[2(b-a) + \frac{a(a+2b)}{b+a}\right]}$$